

УДК 614.8

Математические модели эпидемий и пандемий как источников чрезвычайных ситуаций биолого-социального характера

ISSN 1996-8493
DOI:10.54234/CST.19968493.2022.19.3.73
© Технологии гражданской безопасности, 2022

В.А. Акимов, М.В. Бедило, Е.О. Иванова

Аннотация

В статье рассмотрены математические модели прогнозирования наиболее катастрофичных чрезвычайных ситуаций биолого-социального характера: эпидемий и пандемий.

Ключевые слова: чрезвычайные ситуации биолого-социального характера; эпидемия; пандемия; коронавирусная инфекция COVID-19; модель SIR; модель SEIR; модель MSEIR; модель SEIR-HCD; модель SuEIR; модель MSIR.

Mathematical Models of Epidemics and Pandemics as the Sources of Biological and Social Emergencies

ISSN 1996-8493
DOI:10.54234/CST.19968493.2022.19.3.73
© Civil Security Technology, 2022

V. Akimov, M. Bedilo, E. Ivanova

Abstract

The article considers mathematical models for forecasting the most catastrophic emergencies of biological and social nature: epidemics and pandemics.

Key words: biological and social emergencies; epidemic; pandemic; COVID-19 coronavirus infection; SIR model; SEIR model; MSEIR model; SEIR-HCD model; SuEIR model; MSIR model.

08.07.2022

Согласно [1]: «Эпидемия — массовое, прогрессирующее во времени и пространстве в пределах определенного региона распространение инфекционной болезни людей, значительно превышающее обычно регистрируемый на данной территории уровень заболеваемости», а «Пандемия — эпидемия, характеризующаяся распространением инфекционного заболевания на территории всей страны, территориях сопредельных государств, а иногда и многих стран мира».

Распространение новой коронавирусной инфекции COVID-19 в мире за два с половиной года привело к более пятистам миллионам заражений и более шести миллионам смертей¹. Высокая динамика роста заболеваемости и смертности привела не только к серьезной нагрузке на систему здравоохранения практически во всех странах мира, но и к развитию научных методов моделирования эпидемий и пандемий [2, 3].

Математические модели распространения инфекций можно разделить по цели их использования на следующие категории [4]:

- модели для идентификации вспышек эпидемий по данным в режиме реального времени;
- методы машинного обучения для прогнозирования распространения инфекции;
- модели для анализа и прогнозирования распространения инфекции при различных противоэпидемических мерах.

Для первой категории используются статистические модели, призванные по текущим данным об исследуемой инфекции (количество обращений за медицинской помощью, число госпитализаций, смертность и т. д.) констатировать факт начала эпидемии.

В этой категории наиболее популярным методом моделирования является CUSUM-тест [5], который можно описать следующим образом.

Пусть $y(t_j)$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ — число случаев инфицирования. Величина кумулятивной суммы определяется как

$$CUSUM(i) = \sum_{j=1}^i (y(t_j) - k_j), \quad (1)$$

где k_j — референтное значение случаев инфицирования в момент времени t_j . При превышении величиной CUSUM порогового значения фиксируется факт начала эпидемии.

Модели данной категории не являются моделями распространения эпидемий, поскольку не описывают саму динамику, а являются статистическими моделями анализа наблюдаемых характеристик этого явления. Таким образом, область применения данных моделей ограничивается констатацией начала факта эпидемии, но не включает анализ влияния противоэпидемических мер и предсказание характера распространения инфекции.

В последние годы получили распространение методы машинного обучения, анализа и прогнозирования характеристик эпидемии на основе поисковых запросов и постов в социальных сетях с определением местоположения [6]. Количество запросов и сообщений с определенными ключевыми словами (например, симптомы исследуемого заболевания, регион распространения инфекции и ряд других) используется в качестве предикторов в модели машинного обучения. Неоспоримым преимуществом данного подхода является отсутствие временного лага между началом проявления первых симптомов у заболевших и определением диагноза при обращении в медицинские учреждения. Однако многие, достаточно сложные для описания предметной области, модели машинного обучения являются нелинейными и сложно интерпретируются. По этой причине затрудняется возможность анализа результатов противоэпидемических мер, поскольку невозможно их включение в модель в явном виде.

Таким образом, модели данной категории хорошо подходят для фиксации начала эпидемии и прогнозирования распространения инфекции на ее начальном этапе. В дальнейшем качество прогноза снижается в силу введения специфичных противоэпидемических мер и различий в состояниях иммунитета населения в настоящий момент и в момент получения данных для обучающей выборки модели.

Модели третьей категории, называемые также компартментными моделями, могут быть использованы для предсказания динамики распространения вирусных инфекций и анализа эффективности противоэпидемических мер.

Компартментные модели характеризуются наличием пространства состояний (компартментов) и описания правил перехода между ними. Количество и вид состояний могут быть разными, в простейшем случае используются состояния: восприимчивый, инфицированный, выздоровевший (классическая SIR-модель [7], названная по первым буквам состояний: S — susceptible, I — infected, R — Recovered), предложенные шотландскими эпидемиологами Кермаком и Маккендриком² в 1920-х годах.

Принципиальная схема работы SIR-модели приведена на рис. 1.

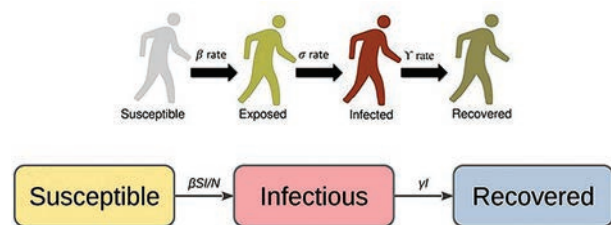


Рис. 1. Модель SIR

Уравнение, описывающее изменение числа здоровых (и при этом восприимчивых к заболеванию) индивидуумов, которое уменьшается со временем пропорционально

¹ WHO Coronavirus (COVID-19) Dashboard [Электронный ресурс] // URL: <https://covid19.who.int/table> (дата обращения: 23.06.2022).

² Википедия [Электронный ресурс] // URL: https://translated.turbopages.org/proxy_u/en-ru.ru.0180b29c-62f609ff-9ae1368d-74722d776562/https/en.wikipedia.org/wiki/Kermack-McKendrick_theory (дата обращения: 23.06.2022).

числу контактов с инфицированными, восприимчивый переходит в состояние инфицированного³:

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta IS}{N}. \quad (2)$$

Уравнение индекса репродукции (скорость увеличения числа заразившихся) растет пропорционально числу контактов здоровых и инфицированных и уменьшается по мере выздоровления последних³:

$$\frac{dI}{dt} = (R_0 \frac{S}{N} - 1)\gamma I, \quad (3)$$

где:

$S(t)$ — численность восприимчивых индивидов в момент времени t , чел.;

$I(t)$ — численность инфицированных индивидов в момент времени t , чел.;

$R(t)$ — численность переболевших индивидов в момент времени t , чел.;

R_0 — количество одновременно болеющих, чел.;

β — коэффициент интенсивности контактов индивидов с последующим инфицированием;

γ — коэффициент интенсивности выздоровления инфицированных индивидов.

Недостатком SIR-моделей является отсутствие гибкости — невозможность учета изменения таких параметров, как: новые мутации вируса и штамма, ограничительные меры, вакцинация и т.п. [8].

В последующие годы наиболее распространенной базовой моделью для прогнозирования эпидемий, передающихся воздушно-капельным путем, стала модель Барояна-Рвачева [9, 10].

В основу модели положены методы механики сплошных сред [11], элементами множества являются члены человеческой популяции (восприимчивые, в инкубации, больные).

В дальнейшем модель модифицировалась учеными разных стран в зависимости от той или иной эпидемии и в настоящее время получила всемирно известную аббревиатуру — SEIR.

SEIR — модель описания динамики заболеваний с временным иммунитетом (выздоровевшие индивиды со временем снова становятся восприимчивыми). Модель описывает развитие наиболее опасных эпидемий, поскольку длительный инкубационный период может препятствовать своевременному обнаружению заболевания. Модель предназначена для оценки последствий, когда есть риск, что заболевание охватит значительное число индивидов в популяции. Многие болезни имеют скрытую или латентную фазу, во время которой индивид уже столкнулся с вирусом, но еще сам не стал заразным. Этот период между контагенацией и самой стадией болезни может быть включен в модель SIR путем добавления показателя латентной/экспонированной популяции E . В этом случае контагенированные, но еще не заразные индивиды перемещаются из категории S в E и из E в I (см. рис. 2).

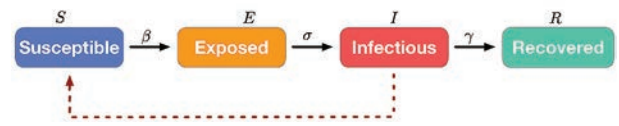


Рис. 2. Модель SEIR

Изменение числа здоровых (и при этом восприимчивых к заболеванию) индивидов уменьшается со временем пропорционально числу контактов с инфицированными. После заражения здоровый индивид переходит в состояние контактного по данному заболеванию. Уравнение, описывающее данные закономерности, имеет следующий вид:

$$\frac{dS}{dt} = \mu N - \mu S - \beta \frac{I}{N} S. \quad (4)$$

Уравнение, которое вносит задержку по времени при переходе индивидуума из состояния контактного в состояние инфицированного (больного), имеет вид:

$$\frac{dE}{dt} = \beta \frac{I}{N} S - (\mu + \alpha) E. \quad (5)$$

Переход индивидуума из состояния «контактный» в состояние «инфицированный» имеет следующее математическое выражение:

$$\frac{dI}{dt} = \alpha E - (\gamma + \mu) I. \quad (6)$$

Инфицированные индивидуумы могут погибнуть, что учитывает коэффициент μ в уравнении, которое имеет вид:

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R. \quad (7)$$

Интенсивность развития эпидемии описывает базовый коэффициент воспроизведения, по соотношению:

$$R_0 = \frac{\alpha}{\mu} + \frac{\beta}{\mu + \gamma}, \quad (8)$$

где:

μ — уровень смертности;

α — величина, обратная среднему инкубационному периоду заболевания;

$E(t)$ — численность индивидов — носителей заболевания в момент времени t ;

$N = S + E + I + R$ — численность популяции.

Поскольку латентная фаза делает индивида заразным спустя некоторое время после контакта с патогеном, последующая его передача уже от инфицированного человека случится позднее, чем если бы была применена модель SIR, в которой латентная фаза отсутствует. Следовательно, включение более продолжительного латентного периода приведет к более медленному распространению болезни в популяции.

Модель MSEIR (M — наделенные иммунитетом от рождения, S — восприимчивые, E — контактные, I — инфицированные, R — выздоровевшие) — одна из

³ Ломоносова А.В. Эпидемиологические особенности и основные направления надзора и профилактики коклюша на современном этапе. 2021 [Электронный ресурс] // URL: <http://dlib.rsl.ru/rsl01010000000/rsl01010623000/rsl01010623329/rsl01010623329.pdf> (дата обращения: 12.08.2022).

самых сложных для анализа в силу наличия большого числа независимых параметров.

В реалистичной популяции динамика болезни достигнет устойчивого состояния, если μ и ν представляют собой коэффициенты рождаемости и смертности, соответственно, и предполагаются равными для поддержания постоянной численности популяции.

$$\frac{dM}{dT} = B - \delta M - \mu M; \quad (9)$$

$$\frac{dS}{dt} = \mu N - \nu S - \frac{\beta SI}{N}; \quad (10)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \nu I - \sigma I; \quad (11)$$

$$\frac{dr}{dt} = \gamma I - \nu R, \quad (12)$$

где:

- $N = S + E + I + R$ — вся популяция;
- S — восприимчивые (незараженные) индивидуумы с 3 лет;
- E — зараженные индивидуумы или находящиеся в инкубационном периоде;
- I — инфицированные индивидуумы с симптомами;
- R — вылеченные индивидуумы.

От ранее рассмотренных моделей эта система уравнений отличается тем, что учитывает рождение детей, вероятность заражения которых растет со временем по мере утраты ими иммунитета, приобретенного внутритробно.

Модель SEIR-HCD (H – заболевшие индивидуумы, которые были госпитализированы в больницу; C — пациенты, находящиеся в критической ситуации; D — летальный исход болезни основан на системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений на отрезке $t \in [t_0, T]$:

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{5-a(t-\tau)}{N(t)} \left(\frac{\alpha_I S(t)I(t)}{N(t)} + \frac{\alpha_E S(t)E(t)}{N(t)} \right) + \gamma R(t); \quad (13)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{5-a(t-\tau)}{5} \left(\frac{\alpha_I S(t)I(t)}{N(t)} + \frac{\alpha_E S(t)E(t)}{N(t)} \right) - (k+p)E(t); \quad (14)$$

$$\frac{dR}{dt} = \beta I(t) + \rho E(t) - R(t) + \varepsilon HRH(t); \quad (15)$$

$$\frac{dH}{dt} = \nu I(t) + \varepsilon CHC(t) - (\varepsilon HC + \varepsilon HR)H(t); \quad (16)$$

$$\frac{dC}{dt} = \varepsilon HCH(t) - (\varepsilon CH + \mu)C(t); \quad (17)$$

$$\frac{dD}{dt} = \mu C(t), \quad (18)$$

с начальными условиями:

$$S(t_0) = S_0, E(t_0) = E_0, I(t_0) = I_0, R(t_0) = R_0,$$

$$H(t_0) = H_0, C(t_0) = C_0, D(t_0) = D_0,$$

где:

$N = S + E + I + R + H + C + D$ — вся популяция, которая состоит из следующих групп:

S — восприимчивые (незараженные) индивидуумы с 3 лет;

E — зараженные индивидуумы или находящиеся в инкубационном периоде;

I — инфицированные индивидуумы с симптомами;

R — вылеченные индивидуумы;

H — госпитализированные, т.е. с тяжелым протеканием болезни;

C — находящиеся в критическом состоянии, требующие подключения аппарата ИВЛ;

D — летальные случаи заболевания;

$a(t)$ — индекс самоизоляции;

τ — латентный период (характеризует запаздывание выделения вирионов или заразности);

αI — параметр заражения между инфицированным и восприимчивым населением, который связан с контагиозностью вируса и социальными факторами;

αE — параметр заражения между бессимптомной и восприимчивой группами населения;

k — частота появления симптомов в открытых случаях, что приводит к переходу от бессимптомной к инфицированной популяции;

ρ — скорость восстановления выявленных случаев (случаи, которые выявлены, но индивидуумы выздоравливают без каких-либо симптомов);

β — скорость выздоровления зараженных индивидуумов;

γ — скорость повторного заражения;

ν — доля госпитализированных случаев с тяжелым протеканием заболевания;

εHR — вероятность выздоровления индивидуумов, находящихся в тяжелом состоянии;

εHC — доля госпитализированных индивидуумов, находящихся в критическом состоянии, требующем подключения аппарата ИВЛ;

εCH — вероятность отключения аппарата ИВЛ у пациента;

$cisol$ — коэффициент влияния индекса самоизоляции на заражаемость;

μ — смертность в результате инфицирования;

E_0 — начальное количество бессимптомных инфицированных;

R_0 — начальное количество вылеченных индивидуумов.

Модель SuEIR — это эпидемическая модель для прогнозирования активных случаев и смертей от COVID-19 с учетом незарегистрированных случаев (см. рис. 3).

В модели SuEIR введен новый параметр $\mu < 1$ в динамику эволюции для контроля соотношения экспонированных случаев, которые подтверждаются и сообщаются общественности. Уравнения модели SuEIR приведены в соотношениях (19)–(23):

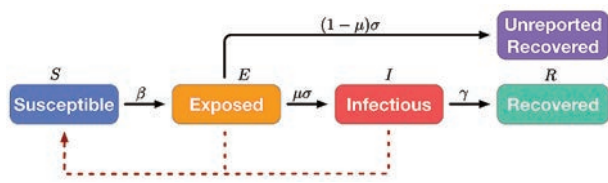


Рис. 3. Модель SuEIR

$$\frac{dS_t}{dt} = -\frac{\beta(I_t + E_t)S_t}{N}; \quad (19)$$

$$\frac{dE_t}{dt} = -\frac{\beta(I_t + E_t)S_t}{N} - \sigma E_t; \quad (20)$$

$$\frac{dE_t}{dt} = -\frac{\beta(I_t + E_t)S_t}{N} - \sigma E_t; \quad (21)$$

$$\frac{dI_t}{dt} = \mu\sigma E_t - \gamma I_t; \quad (22)$$

$$\frac{dR_t}{dt} = \gamma I_t. \quad (23)$$

Модель MSIR (M — «maternally derived immunity») включает аналитический блок M (для материнского иммунитета) в начало модели (см. рис. 4).



Рис. 4. Модель MSIR

Модель MSIR описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\frac{dM}{dt} = \Lambda - \delta M - \mu M; \quad (24)$$

$$\frac{dS}{dt} = \delta M - \frac{\beta SI}{N} - \mu S; \quad (25)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \gamma S - \mu I; \quad (26)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R. \quad (27)$$

В [12, 13] показана принципиальная возможность построения компьютерной модели развития чрезвычайной ситуации биолого-социального характера с использованием эпидемиологической модели SIR и системы компьютерной алгебры Mathematica.

Применяемые математические модели стали широко применяться при эпидемии коронавируса для прогнозирования распространения инфекции [14, 15, 16, 17].

Литература

- ГОСТ Р 22.0.04-2020. Безопасность в чрезвычайных ситуациях. Биолого-социальные чрезвычайные ситуации. Термины и определения.
- Акимов В. А., Диденко С. Л., Олтян И. Ю. Моделирование биолого-социальных чрезвычайных ситуаций с использованием эпидемиологической модели SIR // Технологии гражданской безопасности. 2020. № 4 (66). С. 4–8.

- Акимов В. А., Бедило М. В., Суцев С. П. Исследование чрезвычайных ситуаций природного, техногенного и биолого-социального характера современными научными методами: Монография. М.: ФГБУ ВНИИ ГОЧС (ФЦ), 2021. 180 с.
- Siettos C. I., Russo L. Mathematical modeling of infectious disease dynamics // Virulence. 2013. Vol. 4. No. 4. P. 295–306.
- Hohle M., Paul M. Count data regression charts for the monitoring of surveillance time series // Comput Stat Data Anal. 2008. Vol. 52. P. 4357–4368.
- Chan E. H., Sahai V., Conrad C., Brownstein J. S. Using web search query data to monitor dengue epidemics: a new model for neglected tropical disease surveillance // PLoSNegl Trop Dis. 2011. Vol. 5.
- Vasair Nicolas. A Short History of Mathematical Population Dynamics. London: Springer, 2011. 170 p.
- Йейтс Кит. Математика жизни и смерти. М.: «Бомбора», 2020. 350 с.
- Бароян О. В., Рвачев Л. А. Математика и эпидемиология. М.: Знание, 1977. 63 с.
- Бароян О. В., Рвачев Л. А., Иванников Ю. Г. Моделирование и прогнозирование эпидемий гриппа для территории СССР. М.: ИЭМ им. Н. Ф. Гамалеи, 1977. 546 с.
- Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954.
- Акимов В. А., Диденко С. Л., Олтян И. Ю. Нелинейная наука для исследования аварий, катастроф и стихийных бедствий. М.: ФГБУ ВНИИ ГОЧС (ФЦ), 2020. 134 с.
- Безопасность России. Правовые, социально-экономические и научно-технические аспекты. Анализ и обеспечение защищенности от чрезвычайных ситуаций. М.: МГОФ «Знание», 2021. 500 с.
- Арефьева Е. В. Применение математического моделирования в прогнозах распространения инфекции / Е. В. Арефьева, Е. В. Муравьева, Б. М. Валиуллин // Вестник НЦБЖД. 2021. № 2 (48). С. 82–92.
- Жумартова Б. О. Применение SIRS и SEIR-HCD моделей в моделировании эпидемий / Б. О. Жумартова, Р. С. Ысмагул // Вестник СКУ им. М. Козыбаева. 2022. № 1 (53). С. 18–22.
- Черкесов В. В. Возможности использования прогнозных аналитических моделей эпидемий гриппа при пандемии COVID-19 / В. В. Черкесов, О. А. Трунова, А. В. Голованов // Вестник Академии гражданской защиты. 2020. № 2(22). С. 21–26.
- Акимов В. А. Приложения общей теории безопасности к исследованию чрезвычайных ситуаций природного, техногенного и биолого-социального характера / В. А. Акимов // Технологии гражданской безопасности. 2021. Т. 18. № 5. С. 13–28.

Сведения об авторах

Акимов Валерий Александрович: д. т. н., проф., засл. деятель науки РФ, ФГБУ ВНИИ ГОЧС (ФЦ), г. н. с. института. Москва, Россия. SPIN-код: 8120-3446.

Бедило Максим Владимирович: к. в. н., доц., ФГБУ ВНИИ ГОЧС (ФЦ), начальник института. Москва, Россия. SPIN-код: 5524-2038.

Иванова Екатерина Олеговна: ФГБУ ВНИИ ГОЧС (ФЦ), с. н. с. науч.-исслед. центра. Москва, Россия. SPIN-код: 5483-4886.

Information about authors

Akimov Valery A.: ScD (Technical Sc.), Professor, Honored Scientist of the Russian Federation, All-Russian Research Institute for Civil Defense and Emergencies, Chief Researcher of the Institute. Moscow, Russia. SPIN-scientific: 8120-3446.

Bedilo Maxim V.: PhD (Military Sc.), Assistant Professor, All-Russian Research Institute for Civil Defense and Emergencies, Head of the Institute. Moscow, Russia. SPIN-scientific: 5524-2038.

Ivanova Ekaterina O.: All-Russian Research Institute for Civil Defense and Emergencies, Senior Researcher, Research Center. Moscow, Russia. SPIN-scientific: 5483-4886.